CONCOURS D'ADMISSION A L'E.S.M. DE SAINT-CYR EN 1991

MATHÉMATIQUES II

CONCOURS SCIENCES

Option M-P

Durée : 4 heures

Dans l'appréciation des copies, il sera tenu compte de la rigueur des raisonnements, de la précision de la rédaction, ainsi que de la présentation.

Les différentes parties sont indépendantes.

Le candidat pourra, à condition de l'indiquer clairement, admettre un résultat afin de traiter les questions suivantes.

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Notations.

On considère dans tout le problème un espace vectoriel E de dimension finie n sur $\mathbf{C}$. On note I_E l'application identique de E dans E et $\mathscr{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.

On note $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n sur $\mathbf{C}$ et I_n la matrice unité d'ordre n.

Si $u \in \mathscr{L}(E)$ et si F est un sous-espace vectoriel de E on dit que F est stable par u si $u(F) \subset F$.

PARTIE I

Dans cette partie, u désigne un endomorphisme de E ayant n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

1 - Montrer qu'il existe une base de E sur laquelle la matrice de u est diagonale.

2 - Soit $P = \sum_{i=0}^{N} a_i X^i$ un polynôme de $\mathbf{C}[X]$ et v l'endomorphisme de E défini par :

$$v = P(u) = \sum_{i=0}^{N} a_i u^i = a_N u^N + \ldots + a_i u^i + \ldots + a_0 I_E .$$

a) Montrer que $u \circ v = v \circ u$.

b) Montrer que v est diagonalisable.

c) Calculer les valeurs propres de v et son déterminant en fonction des valeurs propres de u.

3 - Application :

Soit $A = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&1 \\ 1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&1&0 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 5&4&3&2&1 \\ 1&5&4&3&2 \\ 2&1&5&4&3 \\ 3&2&1&5&4 \\ 4&3&2&1&5 \end{bmatrix}$ deux matrices de $\mathscr{M}_5(\mathbf{C})$.

a) Déterminer les valeurs propres de A.

b) Montrer qu'il existe cinq complexes a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, tels que :

$$B = a_0 I_5 + a_1 A + a_2 A^2 + a_3 A^3 + a_4 A^4 .$$

En déduire les valeurs propres de B et une expression du déterminant de B.

c) Soit $z \in \mathbf{C}$ tel que $z^5 = 1$ et $z \neq 1$. Simplifier :

$$(z - 1)(5z^5 + 4z^4 + 3z^3 + 2z^2 + z).$$

d) En déduire que $\det B = 3 \times 5^4$.

4 - Soit v un endomorphisme de E tel que $u \circ v = v \circ u$.

On note $(\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n})$ une base de E formée de vecteurs propres de u.

a) Montrer que : $\forall i \in [1, n]$, $\exists \mu_i \in \mathbb{C}$ tel que : $v(\vec{e_i}) = \mu_i \vec{e_i}$.

b) Soit n nombres complexes fixés, notés $\mu_1, \ldots, \mu_n$.

Montrer qu'il existe un unique polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ de degré strictement inférieur à n tel que :

$$\forall i \in [1, n] \qquad P(\lambda_i) = \mu_i .$$

(Pour rechercher un tel polynôme P, on pourra considérer la fraction rationnelle : $F = \dfrac{P}{\prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)}$).

c) Déduire des questions précédentes qu'il existe un polynôme P de degré strictement inférieur à n tel que : $v = P(u)$.

5 - Soit $C_u = \{ v \in \mathcal{L}(E) \text{ tel que } u \circ v = v \circ u \}$.

a) Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1) $v \in C_u$;

2) il existe une base de E sur laquelle les matrices de u et v sont diagonales ;

3) il existe un polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ de degré strictement inférieur à n tel que $v = P(u)$.

b) Montrer que C_u est une $\mathbb{C}$-algèbre commutative. Quelle est sa dimension ?

6 - Application Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$.

a) Déterminer les valeurs propres de A et une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

b) On se propose de chercher les matrices B telles que : $B^3 = A$ (1).

Montrer que si B vérifie (1) : $BA = AB$.

En déduire toutes les solutions de (1).

c) Si $\{B_1, \ldots, B_m\}$ est l'ensemble des solutions de (1) calculer : $\sum_{j=1}^{m} B_j$ et $\prod_{j=1}^{m} B_j$.

PARTIE II

Soit G un sous-groupe fini et commutatif du groupe GL(E) des automorphismes de E.

On note q le nombre d'éléments de G.

1 - On se propose de montrer que tous les éléments de G ont au moins un vecteur propre en commun.

a) Traiter le cas $n = 1$.

b) Traiter le cas où tous les éléments de G sont des homothéties.

c) Montrer que si un automorphisme g de G n'est pas une homothétie et si $n > 1$, g admet au moins une valeur propre λ et un sous-espace propre associé E_λ de dimension strictement inférieure à n. Vérifier que E_λ est stable par tous les éléments de G.

d) Démontrer par récurrence sur l'entier n qu'il existe un vecteur propre commun à tous les éléments de G.

2 - A tout élément f de $\mathcal{L}(E)$ on associe $\bar{f}$ défini par : $\bar{f} = \dfrac{1}{q} \sum_{g \in G} g \circ f \circ g^{-1}$.

a) Montrer que : $\bar{f} \in \mathcal{L}(E)$.

b) Montrer que : $\forall g \in G$, $g \circ \bar{f} \circ g^{-1} = \bar{f}$.

3 - Un sous-espace vectoriel F de E est dit stable par G s'il est stable par tout élément de G.

Soit F un sous-espace vectoriel stable par G.

A SUIVRE

a) Montrer que : $\forall g \in G$, $g(F) = F$.

b) Soit Π un projecteur de E d'image F.
Montrer que $\overline{\Pi}$ défini au 2 - est un projecteur de E d'image F et de noyau stable par G.

c) En déduire que tout sous-espace vectoriel de E stable par G a un supplémentaire dans E stable par G.

4 - Déduire des questions précédentes qu'il existe une base de E sur laquelle tous les éléments de G ont une matrice diagonale.

5 - Énoncer une condition nécessaire et suffisante pour qu'un sous-groupe fini de GL(E) soit commutatif.

PARTIE III

Soit $\mathcal{H}$ un sous-ensemble non vide d'endomorphismes de E qui vérifie (H) :

(H) $\begin{cases} (1) \text{ Tout élément de } \mathcal{H} \text{ est diagonalisable} \\ (2) \ \forall (u, v) \in \mathcal{H}^2, \ u \circ v = v \circ u. \end{cases}$

1 - Montrer que si on considère une base $(\vec{e_1}, ..., \vec{e_n})$ de E et l'ensemble $\mathcal{L}$ des endomorphismes de E dont la matrice dans $(\vec{e_1}, ..., \vec{e_n})$ est diagonale, $\mathcal{L}$ vérifie (H).

2 - Soit u un endomorphisme diagonalisable de E, et F un sous-espace vectoriel de E de dimension p avec $1 \leqslant p < n$, stable par u.

a) Montrer qu'il existe une base $(\vec{e_1}, ..., \vec{e_n})$ de E telle que $(\vec{e_1}, ..., \vec{e_p})$ soit une base de F et $\vec{e_{p+1}}, ..., \vec{e_n}$ des vecteurs propres de u.

b) On note F' le sous-espace vectoriel de E de base $(\vec{e_{p+1}}, ..., \vec{e_n})$, u_F et $u_{F'}$ les restrictions de u à F et F' respectivement, I_F et $I_{F'}$ les applications identiques de F dans F et de F' dans F' respectivement.
Montrer que u_F et $u_{F'}$ définissent des endomorphismes de F et F' respectivement.
Si α est une valeur propre de u montrer que :

$$\text{Ker } (u - \alpha I_E) = \text{Ker } (u_F - \alpha I_F) \oplus \text{Ker } (u_{F'} - \alpha I_{F'}).$$

c) En déduire que u_F est diagonalisable.

3 - Soit $\mathcal{L}$ un ensemble d'endomorphismes de E vérifiant les hypothèses (H). On se propose de montrer par récurrence sur n qu'il existe une base de E sur laquelle tous les éléments de $\mathcal{L}$ ont une matrice diagonale.

a) Traiter le cas $n = 1$.

b) On suppose la propriété vérifiée pour tout entier naturel k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$ et on considère E de dimension $n + 1$ et $\mathcal{H}$ un ensemble d'endomorphismes de E vérifiant (H).

α) Montrer que si $u \in \mathcal{H}$ chaque sous-espace propre de u est stable par tous les éléments de $\mathcal{H}$.

β) Conclure.

4 - Application

On rappelle la formule du produit de matrices par blocs : si A, B, C, D, A', B', C', D' sont des matrices carrées d'ordre n sur $\mathbb{C}$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{bmatrix}$$

Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que A et B soient diagonalisables et $AB = BA$.

a) Montrer qu'il existe une matrice carrée inversible P telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient diagonales.

b) On pose $Q = \begin{bmatrix} P & -P \\ P & P \end{bmatrix}$ $\quad Q' = \begin{bmatrix} P^{-1} & P^{-1} \\ -P^{-1} & P^{-1} \end{bmatrix}$. Calculer QQ' et en déduire Q^{-1}.

c) Montrer que la matrice $M = \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}$ est diagonalisable.

FIN